de Sitter 空間における Rindler ウェッジ間のエンタングルメント

著者	中川 弘一
雑誌名	星薬科大学一般教育論集
号	38
ページ	1-28
発行年	2020-12-10
URL	http://id.nii.ac.jp/1240/00000844/

de Sitter 空間における Rindler ウェッジ間のエンタングルメント

中川　弘一

（星薬科大学　物理学研究室）

概要

文献 [1] において，de Sitter 空間におけるエンタングルメントの概念は，二つの切り離された境界と一つの因果的に切り離された内部から成る，時空多様体の非自明な Lorentz 幾何学から自然に生じることが論じられ，バルク 4 次元の空間において，二つの境界をもつ Hilbert 空間のテンソル積における熱場二重状態を用いて，慣性観測者のホログラフィックな記述が提案され，それによって，Gibbons–Hawking 公式が共形的な無限過去と無限未来の間のホログラフィック・エンタングルメント・エントロピーとして得られることが示された．また，因果的に切り離された２つの Rindler ウェッジ間のバルク・エンタングルメントを考えて，対応するエンタングルメント・エントロピーが，$dS_4/\mathbb{Z}_q$ オービフォールドの固定点の集合を定義する余次元数２の極小曲面のペアの面積の４分の１で与えられることが示された．

本稿では，文献 [1] に沿って，これらの解説とその研究の現状について考察する．

1　序論と準備

遠く離れた超新星の宇宙物理学的な観測 [2,3] は，われわれの宇宙が小さな正の宇宙定数により引き起こされる加速膨張をしていることを示している．加速膨張の結果として，de Sitter (dS) 空間の慣性観測者は，宇宙ホライズによって取り囲まれている全時空の部分領域とだけ因果的につながっている．

Gibbons と Hawking によって指摘されたように [4]，dS 空間は，ブラックホールの熱力学的性質とよく似た，多くの熱力学的性質を顕わにしている．注目すべきことに，まさにブラックホールの場合と同様に [5–8]，dS 空間における慣性観測者は，宇宙ホライズの面積の 4 分の 1 で与えられる熱力学的エントロピーに対応した，dS 半径の逆数に比例する温度の熱輻射を検出する．

主に dS 背景上の重力に関する UV 完全な理論がないため [9–11]，dS 空間の熱的特徴の微視的レベルでの普遍な記述は不明のままであるが，いくつかの提案がなされている．これらは本質的に 2 つの関連するアプローチに従い，両者とも漸近対称性の変数と可能な中心拡大に依存するが，これらの対称性が中心拡大された時空領域では異なることが分かっている．

これらのアプローチの 1 つは，Banados–Teitelboim–Zanelli（BTZ）ブラックホールの Bekenstein-Hawking 公式 [12,13] の Carlip の導出 [14] によって動機付けられ，ホライズン近傍対称性の代数的な性質とそのアフィン拡大 (通常は Virasoro 拡大) に基づいている．このアプローチにしたがい，さらに 3 次元重力の Chern–Simons 定式化法を使って，Maldacena と Strominger は，Chern–Simons レベル（実際は複素数の虚部）によって大雑把に与えられるエネルギー準位において，dS ホライズでの基盤になる対称性は空間的円盤の境界における $SL(2,\mathbb{C})$ カレント代数に相当することを示した [15]．この境界では Chern–Simon 理論は $SL(2,\mathbb{C})$Wess–Zumino–Witten 模型に還元し，さらにその dS エントロピーは高励起された熱的状態のエントロピーとして現れる．

後に，ホライズン近傍対称性は任意の次元数の場合と，dS ホライズンを含む Killing ホライズンの任意のタイプに拡張された．境界条件のある適切な集合の下で，共変的位相空間の方法 [16,17] を用いて，Carlip は，ある多様体の境界を局所的に Killing ホライズンとしてモデル化して，一般相対論の拘束代数に重力結合定数により与えられる非自明な中心拡大が加わることを示し，それにより境界における状態密度が決まり，Cardy の公

式 [18, 19] を経由して面積公式の 4 分の 1 が得られることを示した [20].

dS エントロピー問題への第 2 のルートは，元来 Strominger によって 3 次元ブラックホールの微視的状態の数え上げの意味で提案され [21]，3 次元反 de Sitter (AdS_3) 空間の漸近対称性の Brown–Henneaux 構築法 [22] によって示唆されたルートで，dS 空間の空間的無限遠を対称性が強化される領域として扱うものである．dS/CFT 対応 [9, 23]，その前身 [24–31]，そして，その改良版 [32–39] により，dS エントロピーをもたらす微視的な自由度は大域的 dS 空間に局在する双対ユークリッド的共形場理論の言葉に翻訳された．この理論的枠組みの中で，Gibbons–Hawking 公式が 3 次元空間の中で正確に再現された．この場合，適当な境界条件の下で,（空間的）境界 Brown–York ストレス–エネルギー・テンソル [40] の微分同形変換は，異常シュワルツィアン微分を経由して，Brown–Henneaux の中心荷電と形式的に等しい中心荷電を生成する．

最近では，AdS / CFT 対応 [41–43] のフレームワークでのホログラフィック技術 [44–47] による，CFT エンタングルメント・エントロピーの研究の背後にある理論的根拠に従って，幾何学とエンタングルメント間の相互作用によって駆動される代替パスが採用された．それは，各領域がいくつかの基本的な量子場理論の状態をエンコードする，時空の切り離された領域の間のエンタングルメントエントロピーを用いて，dS 空間におけるのエントロピーを理解することの可能性を探ることになる．

この方向性で，dS 空間上の重力 (ある因果領域の水平線付近) が，1 次元低い次元数の dS 空間上の重力と結合した共形場理論の低エネルギー極限と双対であるとする dS/dS 対応 [48] を用いて，双対理論の 2 つの結合したセクター間の強い相互作用が最大混合縮約密度行列を生み出すことが議論された [49]．これは Rényi エントロピーに変換され，そのエンタングルメント・エントロピー極限を，特定の前提下では，Gibbons-Hawking エントロピーに明らかに一致させることができ，そしてより正確に言えば，3 次元重力の場合の Gibbons-Hawking エントロピーに一致させることができる．

関連した研究により，Gibbons–Hawking エントロピーはユークリッド的 AdS 空間 [50] において解析接続された極値曲面の面積と，さらに，過去と未来の無限間に延びる余次元数 2 の極値曲面の面積 [51] とが結びつけられていることが分かっている．興味深いことに，後者の場合，4 次元 dS 空間は，(熱場二重型の) 二重共形場理論の 2 つのコピーからなるエンタングルした状態に対して双対であり，2 つの共形境界の間のエンタングルメン

トから現れた dS エントロピー (関連する議論も参照) を伴うことが示唆され，その正当性が議論された．

文献 [1] では，dS 空間のエントロピーが時空の連結性に根ざしているため，その時空の非自明なトポロジーの結果として考慮されるべきであることが主張され，この 2 つの共形境界間のエンタングルメントと，dS 内部の 2 つの Rindler ウェッジ間のエンタングルメントについて考察がなされた．2 つの非連結な境界間のエンタングルメントを解析すると，無限過去と無限未来の間のホログラフィック・エンタングルメント・エントロピーとして Gibbons–Hawking の公式が得られることが分かる．2 つの Rindler ウェッジ間のエンタングルメントを調べると，そのエンタングルメント・エントロピーが，$\mathrm{dS}_4/\mathbb{Z}_q$ オービフォールドの固定点の集合に対応する，余次元数 2 の極小曲面のペアに関する面積則に従うことがわかる．

ここからは本稿の残りの部分で頻繁に用いられる dS 空間の熱力学と幾何学に関連した，キーポイントになる概念に関する準備を行う．この概念の包括的なレビューについては，[56, 57] とその参考文献を参照．

d 次元の de Sitter 空間 dS_d は，正定数の曲率を持つ，極大対称 Einstein 多様体である．dS_d は，d 次元的時間様双曲面

$$-(X^0)^2+\sum_{i=1}^{d}(X^i)^2=\ell^2 \tag{1.1}$$

として定義され，ここで，ℓ は，$(d+1)$ 次元 Minkowski 空間 $\mathcal{M}^{1,d}$ に埋め込まれ，座標 (X^0,X^i)，$i=1,...,d$ をもち，さらに平坦計量 $\eta=-(dX^0)^2+\sum_{i=1}^{d}(dX^i)^2$ をもつ，dS_d の半径である．dS_d 双曲面 (1.1) は， $\mathbb{R}\times S^{d-1}$ のトポロジーと明らかな $O(d,1)$ 対称性を持つ．dS_d の計量は，双曲面 (1.1) 上の η から誘発された計量である．この後は $d=4$ の場合に限定して議論を進める．

dS_4 双曲面は，パラメータ化

$$X^0=\ell\sinh\left(\frac{T}{\ell}\right)\ ,\quad X^i=\ell\cosh\left(\frac{T}{\ell}\right)y^i\ ,\quad i=1,\ldots,4\ , \tag{1.2}$$

を通して，3 次元球面によってフォリエートできる．ここで，$-\infty<T<\infty$ であり，y^i は 3 次元単位球面すなわち $\sum_{i=1}^{4}(y^i)^2=1$ をパラメータ化する．このパラメータの選び方から，大域的に定義された，dS_4 上の座標の集合が得られ，その座標には誘発された計量

$$ds^2=-dT^2+\ell^2\cosh^2\left(\frac{T}{\ell}\right)\,d\Omega_3^2 \tag{1.3}$$

が備わっている．このとき，$d\Omega_3^2$ は 3 次元単位球面上の計量である．

共形境界 $\mathcal{I}^{\pm} := \tau^{-1}(\pm\pi/2)$ の $\mathcal{I}^-$ を過去のヌル無限，$\mathcal{I}^+$ を未来のヌル無限とそれぞれ呼び，両者とも S^3 のトポロジーを持っている．ヌル無限過去 $\mathcal{I}^-$ における北極（南極）に起源をもつヌル測地線は，ヌル無限未来 $\mathcal{I}^+$ における南極（北極）に到達する．

大域的 3 次元球面の南極にいる，ある慣性観測者はその Rindler ウェッジ $\mathfrak{R}_S := \mathcal{O}^- \cap \mathcal{O}^+$ と因果的に連結している．ここで，$\mathcal{O}^-$ と $\mathcal{O}^+$ はそれぞれ $\mathcal{O}_S$ の因果的過去と因果的未来である．Rindler ウェッジは，$\mathcal{O}_S$ との信号を送受信できる dS_4 のすべての点の集合と，$\mathcal{O}_S$ を取り囲む，観測者に依存した宇宙ホライズン $\mathcal{H} := \partial\mathfrak{R}_S$ を定義する境界を表す．

$\mathcal{O}_S$ を世界線

$$X^1(\mathcal{O}_S) = \sqrt{\ell^2 + (X^0(\mathcal{O}_S))^2}\ , \quad X^i(\mathcal{O}_S) = 0\ , \quad i = 2, 3, 4\,, \tag{1.4}$$

に沿うようにとると，その Rindler ウェッジは

$$X^0 = \sqrt{\ell^2 - \hat{r}^2}\sinh\left(\frac{\hat{t}}{\ell}\right)\ , \quad X^1 = \sqrt{\ell^2 - \hat{r}^2}\cosh\left(\frac{\hat{t}}{\ell}\right)\ , \quad X^i = \hat{r}\hat{y}^i\ , \quad i = 2, 3, 4\,, \tag{1.5}$$

とパラメータ化でき，ここでは $-\infty < \hat{t} < \infty$, $0 \leqslant \hat{r} < \ell$, および $\sum_{i=2}^4 (\hat{y}^i)^2 = 1$ である．このパラメトリゼーションにより線素は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\hat{r}^2}{\ell^2}\right)d\hat{t}^2 + \frac{d\hat{r}^2}{1 - \frac{\hat{r}^2}{\ell^2}} + \hat{r}^2 d\hat{\Omega}_2^2 \tag{1.6}$$

となる．このように計量 (1.6) は，$\hat{r} = \ell$ にある宇宙ホライズン $\mathcal{H}$ によって取り囲まれた，$\hat{r} = 0$ に置かれた観測者 $\mathcal{O}_S$ の世界線を記述する．

$\mathfrak{R}_S$ の内側では，計量 (1.6) の明示的な時間独立性に従い，Killing 時間の概念が存在する．Killing ベクトル $\partial_{\hat{t}}$ は $\mathfrak{R}_S$ の内側では時間様であり，(Killing) ホライズン $\mathcal{H}$ に沿ってはゼロである．ホライズン近傍に近づくために，無次元パラメータ $\hat{\varepsilon} \ll 1$ を

$$\hat{r} = \ell\left(1 - \frac{\hat{\varepsilon}^2}{2}\right) \tag{1.7}$$

として導入すると，必然的に $\hat{\varepsilon} \to 0$ のときに $\hat{r} \to \ell$ が課される．この極限で，線素 (1.6) の $(\hat{r}, \hat{t})$ セクターは Rindler 幾何学

$$ds^2 \approx \ell^2\left(d\hat{\varepsilon}^2 - \frac{\hat{\varepsilon}^2}{\ell^2}d\hat{t}^2\right) + \cdots \tag{1.8}$$

により良く近似できる．虚時間での有限温度 $T_{\rm dS}=\beta^{-1}$ における周期性 $\hat{t}\sim\hat{t}+i\beta$ は，共役 Gibbons-Hawking エントロピー

$$\mathcal{S}_{\rm dS}=\frac{A_{\mathcal{H}}}{4G_4}=\frac{\pi\ell^2}{G_4} \tag{1.9}$$

を伴い，

$$T_{\rm dS}=\frac{1}{2\pi\ell} \tag{1.10}$$

となることを課し，ここで，$A_{\mathcal{H}}=4\pi\ell^2$ は宇宙ホライズンの面積を表し，G_4 は 4 次元における Newton 定数を表す．

本稿では，文献 [1] に従い，次のような構成をもってそのコンパクトな解説と考察を行う．第 2 節では，4 次元の場合に焦点を当て，最大限に拡張された静的座標の集合を導入する．第 3 節では，エンタングルメントエントロピーの具体的な計算を，最初は過去と未来の共形境界の間で，その次に 2 つの内部 Rindler ウェッジの間で説明する．第 4 節は結果についての議論にあて，今後の研究のための潜在的に興味深い方向をいくつか示す．

2　対蹠的欠損をもつ de Sitter 空間

この説の目的は 2 つある．第一に，北極と南極の両方の Rindler ウェッジを覆い，対極にいて，因果的に非連結な観測者 $\mathcal{O}_N$ と $\mathcal{O}_S$ の世界線を記述する，ある拡張された座標の集合を導入することである．つぎに，この座標系において，宇宙ホライズンの S^2 幾何学は，その固定点が，各面が各観測者の世界線を含む，一対の対極的な極小曲面の元となる，オービフォールド $S^2/\mathbb{Z}_q$ を通して定義されたイグザクト変形の族を許すことを示すことである．

2.1　極大拡張座標

超曲面方程式 (1.1) は埋め込み座標を

$$X_0=\sqrt{\ell^2-\xi^2}\,\cos\theta\,\sinh\left(\frac{t}{\ell}\right)\ ,\quad X_1=\sqrt{\ell^2-\xi^2}\,\cos\theta\,\cosh\left(\frac{t}{\ell}\right)\ , \tag{2.1}$$

$$X_2=\xi\,\cos\theta\ ,\quad X_3=\ell\sin\theta\cos\phi\ ,\quad X_4=\ell\sin\theta\sin\phi\ ,$$

とパラメータ化しても満たされ，このとき，パラメータの範囲は

$$-\infty < t < \infty\ , \quad -\ell < \xi < \ell\ , \quad 0 \leq \theta \leq \pi\ , \quad 0 \leq \phi < 2\pi \tag{2.2}$$

である．その結果，g_4 で表される線素は

$$g_4 = \ell^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) + \cos^2\theta \left[-\left(1 - \frac{\xi^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{d\xi^2}{1 - \frac{\xi^2}{\ell^2}} \right] \tag{2.3}$$

となり，2 人の慣性観測者

$$\mathcal{O}_N := (\theta = 0,\ \xi = 0)\ , \qquad \mathcal{O}_S := (\theta = \pi,\ \xi = 0) \tag{2.4}$$

の Rindler ウェッジの和集合

$$\mathfrak{R}_N \cup \mathfrak{R}_S \tag{2.5}$$

を記述する．ここで，$X^1|_{\mathfrak{R}_N} > 0$, $X^1|_{\mathfrak{R}_S} < 0$ と選んだ．したがって，

$$\theta\,|_{\mathfrak{R}_N} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)\ , \qquad \theta\,|_{\mathfrak{R}_S} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \tag{2.6}$$

であり，一方，各 Rindler ウェッジでは $-\infty < t < \infty$, $-\ell < \xi < \ell$ および $0 \leq \phi < 2\pi$ である．

北極の観測者 $\mathcal{O}_N$ と南極の観測者 $\mathcal{O}_S$（または，$\theta < \pi/2$ と $\theta > \pi/2$ の 2 つの半球面上に存在するそれ以外の点の組）は，光線が $\theta = \pi/2$ の赤道を横切れないように，因果的に非連結である．

Killing ベクトル ∂_t のノルム

$$(\partial_t)^2 = \cos^2\theta \left(\frac{\xi^2}{\ell^2} - 1\right) \tag{2.7}$$

は Rindler ウェッジ (2.5) の内側では負で，その境界 $\xi = \pm\ell$ ではゼロである．後者は，半径 ℓ のある 2 次元球面の時間固定トポロジーをもつ，分岐した Killing ホライズ $\mathcal{H}$ を定義する．

線素 (2.3) は S^2 上での $\mathrm{dS}_2^{\pm}$ ファイブレーションであり，この $\mathrm{dS}_2^{\pm}$ 因子は動径方向への拡張である（$-\ell < \xi < \ell$）．その $\mathrm{dS}_2^{\pm}$ ファイブレーションは $SL(2,\mathbb{R})$ 等長対称性を保ち，その対称性は Rindler の時間並進の生成子 ∂_t を含むが，一方で，S^2 のマニュフェストな対称性 $SO(3)$ を壊して $U(1)$ 対称性に落とす．さらに，その $U(1)$ 対称性は回転の Killing ベク

トル ∂_ϕ により生成される．このように，固定された $\theta \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ に対し，(2.3) のマニュフェストな等長対称性は $U(1) \times SL(2,\mathbb{R})$ を形成する．また，$\theta = 0, \pi$ に対しては，(2.3) のマニュフェストな等長対称性は壊れて $SL(2,\mathbb{R})$ になり，赤道 $\theta = \frac{\pi}{2}$ においては $U(1)$ 因子だけが保たれる．

(1.2) 式と (2.1) 式の X^0 と X^1 の埋込座標のパラメータ化したものを比較すると，

$$\cosh^2\left(\frac{T}{\ell}\right)\sin^2\Theta = \frac{\xi^2}{\ell^2}\cos^2\theta + \sin^2\theta\ , \qquad \frac{\sinh^2\left(\frac{T}{\ell}\right)}{1-\cosh^2\left(\frac{T}{\ell}\right)\sin^2\Theta} = \sinh^2\left(\frac{t}{\ell}\right) \tag{2.8}$$

であることが分かる．この最初の式（と (2.6) の選び方）から，$\mathcal{O}_N$ と $\mathcal{O}_S$ の世界線は，それぞれ，$\Theta = 0, \pi$ に位置する大域的 S^3 の北極と南極に移されることが分かる．また，2 番目の式と，X^0 の符号を比べることにより，$t|_{\Theta=0} = T$, $t|_{\Theta=\pi} = -T$ となり，これより，局所時間は $\mathfrak{R}_N$ においては未来に進み，$\mathfrak{R}_S$ においては過去に進むことが分かる．

Killing 方程式 (2.7) と (2.8) 式の最初の変換を組合わせることにより，宇宙ホライズは，Penrose ダイヤグラムの 2 本の対角線，すなわち，$\mathcal{H} = \partial(\mathfrak{R}_N \cup \mathfrak{R}_S)$ によって表され，$\sin^2\Theta = \cos^2\tau$ を満たす Penrose ダイヤグラムの点 (τ, Θ) に送られることが分かる．

$\mathfrak{R}_N \cup \mathfrak{R}_S$ を覆う拡張された座標系を，単一のウェッジ $\mathfrak{R}_S$ を覆う標準的な静的座標に移すために，(1.6) 式の 2 次元の静的単位球面を $d\hat{\Omega}_2^2 = d\hat{\theta}^2 + \sin^2\hat{\theta}d\hat{\phi}^2$ とパラメータ化する．(1.5) 式と (2.1) 式の埋め込まれた空間座標の比較から

$$\hat{t} = \mathrm{sign}(\cos\theta)\, t\ , \qquad \hat{\phi} = \phi\ , \tag{2.9}$$

および

$$\tan\hat{\theta} = \frac{\ell\tan\theta}{\xi}\ , \qquad \hat{r} = \sqrt{\ell^2\sin^2\theta + \xi^2\cos^2\theta} \tag{2.10}$$

が得られる．(2.10) の 2 つの関係式は

$$\sin\theta = \frac{\hat{r}\sin\hat{\theta}}{\ell}\ , \qquad \xi = \frac{\ell\hat{r}\cos\hat{\theta}}{\sqrt{\ell^2 - \hat{r}^2\sin^2\hat{\theta}}} \tag{2.11}$$

と変形できる．

(2.9)–(2.11) の変換は，$0 \le \theta < \pi/2$ と $\pi/2 < \theta \le \pi$ の拡張された系によって定義された領域から，それぞれ，$\mathfrak{R}_N$ と $\mathfrak{R}_S$ の領域への写像を明確にする．

2.2 De Sitter 空間と Thurston のスピンドル

2 次元オービフォールド [58] $\widehat{\Sigma}_n = \widehat{\Sigma}(q_1, ..., q_n)$ は，可能な計量構造が与えられ，オービフォールド点とよばれる n 個の点 $x_i \in \Sigma,\ 1 \leq i \leq n$ を備えた，(向きづけられた閉) Riemann 面 Σ である．局所的には，オービフォールド点 x_i の周りの近傍は $z_i \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_{q_i}$ によって座標づけられていて，ここで，$q_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ は異方性パラメータとよばれる 1 つの整数に対応する．このように，周期的境界条件 $z_i \sim \exp\left(\frac{2\pi i}{q_i}\right) z_i$ をとることができる．オービフォールド点 x_i の近傍での極座標 $z_i = re^{i\phi_i}$ を用いて，

$$g = dr^2 + r^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{d\phi_i^2}{q_i^2} \tag{2.12}$$

ととれるような，オービフォールド構造と矛盾しない Riemannian 計量 $g(\widehat{\Sigma}_n)$ を選ぶことができる．このとき，異方性パラメータは，$q_i \to 1$ の極限で点 x_i が単に特異ではない点になるような，$\Delta\phi_i = 2\pi\left(1 - \frac{1}{q_i}\right)$ で与えられる欠損角をもつ，各オービフォールド点における計量 g に円錐特異点を誘発する．

典型的でもっとも単純な場合に，あるオービフォールドは，スムーズ面 Σ の離散群 Γ による商 $\widehat{\Sigma} = \Sigma/\Gamma$ としてモデル化できる．2 つの異方性パラメータが等しくなる $q_1 = q_2 = q$ の特殊な場合には，商

$$S^2(q, q) \cong S^2/\mathbb{Z}_q \tag{2.13}$$

として表され，2 次元オービフォールドの特別な族はスピンドル幾何 $S^2(q_1, q_2)$ である．単位球面 S^2 上で，極点 $\theta = 0, \pi$ に $\mathbb{Z}_q$ オービフォールド点をもち， $0 \leq \theta \leq \pi$ と $0 \leq \phi < 2\pi$ の，角座標 (θ, ϕ) を考えると，スピンドル幾何の計量は

$$g_{\text{spindle}} = d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\, d\phi^2\ , \tag{2.14}$$

となり，ここで，$b = b(\theta)$ は漸近的振舞が

$$b(\theta) = \begin{cases} q + \mathcal{O}(\theta^2)\ , & \theta \to 0\ , \\ q + \mathcal{O}((\theta - \pi)^2)\ , & \theta \to \pi \end{cases} \tag{2.15}$$

の，任意のスムーズな正値関数である．

以上で説明した理論的根拠にしたがい，さらに境界条件 $\phi \sim \phi + 2\pi q^{-1}$ を用いると，ホライズ $\mathcal{H} \cong S^2$ の北極と南極を，同じ異方性パラメータ q をもつ 2 つの $\mathbb{Z}_q$ オービフォール

ド点にとることができる．商 $\mathbb{Z}_q$ をとることにより，$\mathcal{H}$ の周辺の幾何はあるスピンドル・オービフォールドの幾何に変形する．結果として，dS_4 線素 (2.3) は円錐特異形式

$$\widehat{g}_4 = \ell^2 g_{\mathrm{spindle}} + w^2 g_2^{\pm} \tag{2.16}$$

をとり，このとき，g_{spindle} は（(2.14) で定義された）$S^2/\mathbb{Z}_q$ 上の計量であり，$g_2^{\pm}$ は $\mathrm{dS}_2^{\pm}$ 上の計量を示す，つまり，

$$g_{\mathrm{spindle}} = d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{q^2}\,d\phi^2 \,, \qquad g_2^{\pm} = -\left(1-\frac{\xi^2}{\ell^2}\right)dt^2 + \frac{d\xi^2}{1-\frac{\xi^2}{\ell^2}} \tag{2.17}$$

である．さらに，ワープ因子 $w(\theta) = \cos\theta$ はホロノミー条件

$$w^2\big|_{\theta=0,\pi} = 1 \,, \quad (w^2)'\big|_{\theta=0,\pi} = 0 \tag{2.18}$$

を満たす．ここから後では，(2.16) の計量を備えた正準特異多様体を

$$\widehat{\mathrm{dS}}_4 := \mathrm{dS}_4/\mathbb{Z}_q \tag{2.19}$$

と表す．

ホロノミー条件 (2.18) によると，オービフォールド点での誘発された計量は

$$(\Sigma_N, h) = \left(\widehat{\mathrm{dS}}_4, \widehat{g}_4\right)\big|_{\theta=0} \,, \quad (\Sigma_S, h) = \left(\widehat{\mathrm{dS}}_4, \widehat{g}_4\right)\big|_{\theta=\pi} \,, \tag{2.20}$$

で与えられ，ここで，$h = g_2^{\pm}$ は誘発された計量である．(2.20) で定義された余次元数 2 の部分多様体 (Σ_N, h) と (Σ_S, h) を格子欠陥と呼ぶことにする．

局所的には，多様体 dS_4 と $\widehat{\mathrm{dS}}_4$ は同じ曲率をもつが，大域的には違ってくる．異方性パラメータ q によって誘発された，円錐特異点の周りの非自明なホロノミーは，１つのデルタ関数特異点として，それぞれのオービホールド点に対する Riemann 曲率テンソル [59] に寄与する．つぎに，Ricci スカラー曲率は

$$R^{(q)} = R - \sum_{I=N,S} 4\pi\left(1-\frac{1}{q}\right)\delta_{\Sigma_I} \tag{2.21}$$

で，ここで，$R = R^{(q)}|_{q=1}$ は正規多様体 dS_4，δ_{Σ_I} は格子欠陥上へのプロジェクター，つまり，$\displaystyle\int_{\widehat{\mathrm{dS}}_4} f\delta_{\Sigma_I} = \int_{\Sigma_I} f|_{\Sigma_I}$．円錐特異多様体 $\widehat{\mathrm{dS}}_4$ 上で (2.21) を積分すると，全作用関数

$$\begin{aligned} I[\widehat{\mathrm{dS}}_4] &:= \frac{1}{16\pi G_4}\int_{\widehat{\mathrm{dS}}_4} d^4x\sqrt{-\widehat{g}_4}\left(R^{(q)} - \frac{6}{\ell^2}\right) \\ &= \frac{1}{16\pi G_4}\int_{\widehat{\mathrm{dS}}_4\setminus(\Sigma_N\cup\Sigma_S)} d^4x\sqrt{-\widehat{g}_4}\left(R - \frac{6}{\ell^2}\right) - \sum_{I=N,S}\mathcal{T}_q\int_{\Sigma_I} d^2y\sqrt{-h} \,, \end{aligned} \tag{2.22}$$

が得られ，これは，部分多様体 Σ_N と Σ_S 除いたバルクでの積分と，テンション

$$\mathcal{T}_q = \frac{1}{4G_4}\Big(1-\frac{1}{q}\Big) \tag{2.23}$$

と結合した，それぞれの格子欠陥に対する Nambu-Goto 作用関数の 1 つのコピーから成る．これは，格子欠陥 Σ_N と Σ_S 上にサポートをもつ，局所化されたストレス－エネルギーテンソル

$$T^N_{ij} = T^S_{ij} = \mathcal{T}_q\, h_{ij}\ , \tag{2.24}$$

を生じる．

3　エンタングルメントからの De Sitter エントロピー

この節ではまず，4 次元 dS 空間のエントロピーは，2 つの切り離された共形的境界 $\mathcal{I}^-$ と $\mathcal{I}^+$ の間のエンタングルメントの結果として導かれることを議論する．次に，2 つの因果的に切り離された Rindler ウェッジ $\mathfrak{R}_S$ と $\mathfrak{R}_N$ の間のエンタングルメントを考え，それに対応するエンタングルメント・エントロピーが，$\mathbb{Z}_q$ バルク作用関数の固定点の集合からなる極小局面を用いると，面積側に従うことを示す．

3.1　非連結境界間のエンタングルメント

dS 空間における開/閉弦様の双対性はないが，文献 [9, 23–39] において，AdS/CFT 対応の公式の根底にある理論的根拠は正曲率の背景空間にどうにか拡張可能であろうということが議論された．この背景空間では，dS 空間上の量子重力は，空間的な共形的境界 $\mathcal{I}^\pm$ 上で定義された（またはそこに埋め込まれた），Euclid 的で，多分非ユニタリーな共形場理論と双対になるべきである．しかし，この双対性の現状は完全には明らかになっていず，これまでに 2 つの確かな例が見つかっているのみであり，その一つの例はバルク 3 次元の場合 [33]（その双対は Euclid 的 Liouville 理論）であり，もう一つの例は [39] で言われているハイヤー・スピン・リアリゼーションである．

ここでは，Bousso のホログラフィーに対するアプローチ [28–30] に従い，2 つのホログラフィック・スクリーンとして dS 空間の過去と未来の共形的境界 $\mathcal{I}^\pm$ を考える．一般的には，これらは，プランク面積あたり 1 自由度（または 1 ビットの情報）以下の密度で，境

界を持つ多様体のすべてのバルク情報を格納している，ある特定の時空の境界に埋め込まれた特殊な超曲面である．dS 空間の場合，任意のヌル測地線はある点 $p^- \in \mathcal{I}^-$ で始まり，ある点 $p^+ \in \mathcal{I}^+$ で終わるという観測に基づき，Bousso は，dS 空間の慣性観測者は点のペア (p^-, p^+) で特徴づけられ，バルク領域の半分は光線に沿って無限過去 $\mathcal{I}^-$ にホログラフィック的に射影され，同様に，もう半分も無限未来 $\mathcal{I}^+$ に射影されることを議論した．

前の議論により，ここから後は次の作業仮説に基づくホログラフィック・スキームを採用する．

dS 空間上の量子重力と，ある共形場理論の 2 つのコピーの間のホログラフィック双対性が存在し，それぞれの境界に対する 1 つのコピーは，バルク Rindler ウェッジ $\mathfrak{R}_S$ に対応する Hilbert 空間が過去と未来の CFT の Hilbert 空間のテンソル積と等しく，つまり，

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{R}_S} = \mathcal{H}_{\mathcal{I}^+} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{I}^-} \tag{3.1}$$

さらに，その分配関数は

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{QG}}[\mathfrak{R}_S] = \mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}[S^3] \times \mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}[S^3] \tag{3.2}$$

となるようなもので，右辺は境界 3 次元球面 $S^3 \cong \mathcal{I}^\pm$ 上の 2 つの同じ分配関数のコピーから構成されている．さらに，その領域において分配関数 $\mathcal{Z}_{\mathrm{QG}}$ が Euclidean オンシェル重力作用

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{QG}}[\mathfrak{R}_S] \approx \exp\big(-I_E[\mathfrak{R}_S]\big) \tag{3.3}$$

で良く近似され，バルクの量子重力が Einstein 重力を用いた低エネルギーの記述を許す，赤外極限の存在を仮定する．（上式において，“≈”がオンシェルでの等号を表す.）

この極限で，対応 (3.2) は

$$\exp\big(-\tfrac{1}{2}I_E[\mathfrak{R}_S]\big) \approx \mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}[S^3] \tag{3.4}$$

となる．静的観測者 $\mathcal{O}_S \in \mathfrak{R}_S$ と関係するバルクの量子状態 $|\mathcal{O}_S\rangle$ は，熱場二重状態

$$|\mathcal{O}_S\rangle \sim \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n\rangle_{\mathcal{I}^-} \otimes |n\rangle_{\mathcal{I}^+} \tag{3.5}$$

によって，ホログラフィックに記述できる．このとき，$|n\rangle_{\mathcal{I}^\pm} \in \mathcal{H}_{\mathcal{I}^\pm}$ であり，境界のモジュラー・ハミルトニアンは $H|n\rangle_{\mathcal{I}^\pm} = E_n|n\rangle_{\mathcal{I}^\pm}$ を満たす．結局，観測者の状態 (3.5) から構成された密度行列は熱的分配関数

$$\rho := |\mathcal{O}_S\rangle\langle\mathcal{O}_S| \sim e^{-\beta H} \tag{3.6}$$

になり，dS 空間の熱力学的性質をエンコードしている．

次に見るように，一連の方程式 (3.1)–(3.6) は，dS 空間の Gibbons–Hawking エントロピーが 2 つの共形境界 $\mathcal{I}^-$ と $\mathcal{I}^+$ の間のエンタングルメントから導かれる，ホログラフィックな枠組みを与える．

まず，量子場理論におけるエンタングルメントのいくつかの基本的な側面を思い出してみる (詳しい解説は，例えば，[62] を参照)．場の理論が定義された Lorentz 多様体を $\mathcal{B}$ で表し，余次元数 1 の空間的 Cauchy スライスを選び（そのスライスにおける系の状態を $\rho_{\mathcal{C}}$ とする），次に，それを $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c$ のように分割し，それに対する理論の Hilbert 空間は $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{A}^c}$ と因子化する．重要なことは，$\mathcal{C}$ 上の初期データの時間発展は，全多様体 $\mathcal{B}$ 上の理論の状態を再構築することになる，すなわち，

$$\mathcal{B} = D^+[\mathcal{C}] \cup D^-[\mathcal{C}] \tag{3.7}$$

ここで，$D^\pm[\mathcal{C}]$ は，Cauchy スライス $\mathcal{C}$ の未来領域と過去領域の依存性をそれぞれ表す．

上記の設定の中で，二つの相補的な系 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}^c$ の間のエンタングルメントの量はエンタングルメント・エントロピー

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}} = -\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}\left(\hat{\rho}_{\mathcal{A}} \log \hat{\rho}_{\mathcal{A}}\right) \tag{3.8}$$

にコード化され，ここで，$\hat{\rho}_{\mathcal{C}}$ を全系 $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c$ の密度行列として，縮約された密度行列を $\hat{\rho}_{\mathcal{A}} := \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}^c}(\hat{\rho}_{\mathcal{C}})$ とする（このときの正規化は $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}\,\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = 1$ とする）．エントロピー (3.8) は極限値

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}} = \lim_{q\to 1} \frac{\log \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}\,\hat{\rho}_{\mathcal{A}}^q}{1-q} = -\partial_q \log \mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}\,\hat{\rho}_{\mathcal{A}}^q\Big|_{q=1} \tag{3.9}$$

として計算することもでき，このとき，縮約された密度行列の q 乗を計算する標準的な方法としてレプリカ法 [54] がある．この処方は，場の理論が定義された多様体 $\mathcal{B} =: \mathcal{B}_1$ の q 重に分岐した被覆 $\mathcal{B}_q$ の構築に基づいている．$\mathcal{B}_q$ を構築するために，エンタングルしている領域 $\mathcal{A}$ に沿って元の多様体 $\mathcal{B}$ を単純に q 回複製する必要がある．トレース作用の周期性より，分岐した被覆 $\mathcal{B}_q$ は，その固定点が，エンタングルしている面として参照され，エンタングルしている領域 $\mathcal{A}$ の境界になっている $\mathbb{Z}_q$ 作用を自然に組み込むことができる．結局，(3.9) における $\hat{\rho}_{\mathcal{A}}^q$ のトレースは公式 [54, 55]

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_{\mathcal{A}}^q = \frac{\mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}[\mathcal{B}_q]}{(\mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}[\mathcal{B}_1])^q} \tag{3.10}$$

を用いることで，分岐した被覆 $\mathcal{B}_q$ 上の場の理論の分配関数により計算できる．

上で概説した理論的根拠は，切り離された dS_4 境界に適応できるが，ただし，重要な違いがある：2つの共形的境界 $\mathcal{I}^+$ と $\mathcal{I}^-$ は Euclide 多様体であり，この時，初期データを含む Cauchy スライスの時間発展を定義することは不可能である．それにもかかわらず，この後提案するように，全境界 $\mathcal{B}$ 上の双対理論の状態が余次元数 1 の Cauchy 様面 $\mathcal{C}_\Phi$ のモジュラー発展を経由して再構築されるような方法で，$\mathcal{C}_\Phi$ を定義することはもっともらしいことである．

このため，ヌル測地線が，過去の 3 次元球面 $\mathcal{I}^-$ 上のすべての点を未来の 3 次元球面 $\mathcal{I}^+$ 上の対蹠点に移す，対蹠写像

$$\pi : S^3 \to S^3 \tag{3.11}$$

を含むという事実を使い [9,23]，境界多様体 $\mathcal{B}$ を

$$\mathcal{B} := (\mathcal{I}^- \cup \mathcal{I}^+) \;/\; \pi \tag{3.12}$$

として定義されるようにとる．したがって，$\mathcal{B}$ は，離散的方位角同定によって与えられ，境界レプリカ対称性として自然に扱われ，明らかな $\mathbb{Z}_q$ 作用を許容する，単一の 3 次元球面のトポロジー

$$\mathcal{B} \cong S^3 \tag{3.13}$$

をもつことが分かる．実際，境界 3 次元球面上の計量を

$$g_{\mathcal{B}} = d\psi^2 + \sin^2\psi\big(d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\Phi^2\big) \tag{3.14}$$

ととると，離散的 $\mathbb{Z}_q$ 同定

$$\Phi \sim \Phi + \frac{2\pi}{q}\ ,\quad q > 1 \tag{3.15}$$

は円周 $S^1 := \{\chi = 0\} \cup \{\chi = \pi\}$ 上の点を不変にし，ここで χ の各値は円周の半分に寄与する；これは，(3.14) の中の角 ψ のすべての一定値に対し，出てくる 2 次元球面は，$\mathbb{Z}_q$ 作用の下で 2 つの固定点（$\chi = 0, \pi$ によって正確に与えられる，北極と南極）をもつ．そのようなすべての点の連続的な集まりは $\mathcal{B} \cong S^3$ 上の固定点の S^1 集合になっている．

づぎに，$\mathcal{B} \cong S^3$ 上の $\mathbb{Z}_q$ 作用の S^1 集合固定点とその境界が一致する，2 つの円盤を張り合わせることから得られる 2 次元球面として Cauchy 様面 $\mathcal{C}_\Phi$ を選ぶ，すなわち，

$$\mathcal{C}_\Phi = D^2_+ \cup D^2_-\ ,\quad \partial D^2_\pm = S^1\,. \tag{3.16}$$

2 つの円盤 $D^2_\pm$ は，まず，$\mathcal{I}^\pm$ 上の対蹠対称性 (3.11) を作用し，それから，方位角 Φ を一定値に固定することにより，別々に得られる．このように，Cauchy 様スライスの構造を，時刻ゼロにおける Cauchy スライスの通常の選び方をする Euclide 空間への解析接続と解釈する．さらに，球面エンタングル領域の場合に知られているように [46]，その解析接続が Euclide 時間に沿ったある $U(1)$ 対称性を生成する,（局所）モジュラー・ハミルトニアンに対する明確な表式が存在する．このため，$\mathcal{C}_\Phi$ におけるデータのモジュラー発展はおそらく全境界 $\mathcal{B}$ 上の状態を再構築する．

境界多様体 $\mathcal{B}$ と Cauchy 様スライスの分割 $\mathcal{C}_\Phi = D^2_+ \cup D^2_-$ を構築した今，2 つの部分系 D^2_+ と D^2_- の間のエンタングルメント・エントロピーを計算することに進む．$\mathcal{A} = D^2_+$ に特化したレプリカ公式は

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^q_{D^2_+} = \frac{\mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}[\mathcal{B}_q]}{(\mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}[\mathcal{B}_1])^q} \tag{3.17}$$

であり，ここで，$\mathcal{B}_q$ は $\mathcal{B}$ の分岐した被覆を表し，この公式から

$$\log \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^q_{D^2_+} = \log \mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}[\mathcal{B}_q] - q \log \mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}[\mathcal{B}_1] \tag{3.18}$$

が得られる．つぎに，境界 3 次元球面 $\mathcal{B} \cong S^3$ に特化したホログラフィック関係式 (3.4) を使うと，

$$\log \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^q_{D^2_+} \approx -\frac{1}{2} I_E[\mathfrak{R}_{S,q}] + \frac{q}{2} I_E[\mathfrak{R}_S] \tag{3.19}$$

が得られる．この式において，$\mathfrak{R}_{S,q}$ は，境界レプリカ対称性 [63] を受け継ぐと仮定される南極の Rindler ウェッジの分岐した被覆を表している $\mathfrak{R}_S =: \mathfrak{R}_{S,1}$．重力作用の局所性を用いると，さらに $I_E[\mathfrak{R}_{S,q}] = q I_E[\mathfrak{R}_S/\mathbb{Z}_q]$ と書け，(3.19) 式は

$$\log \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^q_{D^2_+} \approx -\frac{q}{2}\Big(I_E[\mathfrak{R}_S/\mathbb{Z}_q] - I_E[\mathfrak{R}_S] \Big) \tag{3.20}$$

となる．

上式において，重力作用のオンシェル値は，南極の Rindler ウェッジ $\mathfrak{R}_S$ の領域に制限された，全作用 (2.22) から得られる．この領域において，バルクの $\mathbb{Z}_q$ 作用は単一の格子欠陥に還元される．作用 (2.22) と線要素 (2.16)（さらに (2.17) で与えられる誘発された計

量 $h=g_2^\pm$ も使い）から計算された結果は

$$\begin{aligned}
I_E[\mathfrak{R}_S/\mathbb{Z}_q] &= I[\widehat{dS}_4]\Big|_{\mathfrak{R}_S} \\
&= -\frac{1}{16\pi G_4}\int_{\widehat{dS}_4\setminus\Sigma_S} d^4x\sqrt{g}\Big(R-\frac{6}{\ell^2}\Big)+\mathcal{T}_q\int_{\Sigma_S} d^2y\sqrt{h} \\
&\approx -\frac{3}{4qG_4}A_{\Sigma_S}\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\sin\theta\cos^2\theta\ +\frac{1}{4G_4}\Big(1-\frac{1}{q}\Big)A_{\Sigma_S}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

であり，ここで，南極の Rindler ウェッジだけを考えているので，θ 積分の範囲は（(2.6) に示されている通り）$\theta\in(\pi/2,\pi]$ にとられており，その値は1/3である．また，テンション (2.23) の値と Einstein 方程式 $\ell^2R_{\mu\nu}=3g_{\mu\nu}$ も用いた．最終的に，Σ_S の面積を A_{Σ_S} とした；これは，動径方向に拡張された計量 $h=g_2^\pm$ を付加された Euclid 的格子欠陥は半径 ℓ の 2 次元球面のトポロジー（$\xi>0$ に対する Euclid 的 dS_2 円盤と $\xi<0$ に対する同一物から成る）をもつことに注意して容易に計算される．このようにして，$A_{\Sigma_S}=4\pi\ell^2$ であり，重力作用 (3.21) のオンシェル値は

$$I_E[\mathfrak{R}_S/\mathbb{Z}_q]\approx\Big(1-\frac{2}{q}\Big)\frac{A_{\Sigma_S}}{4G_4}=\Big(1-\frac{2}{q}\Big)\frac{\pi\ell^2}{G_4} \tag{3.22}$$

となる．(3.20) 式にこの値を代入し，$\log\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^q_{D^2_+}=(1-q)\,\frac{A_{\Sigma_S}}{4G_4}$ を得て，したがって，エンタングルメント・エントロピー (3.9) は極小曲面 Σ_S の面積の 4 分の 1 $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}=\frac{A_{\Sigma_S}}{4G_4}=\frac{\pi\ell^2}{G_4}$ として得られることが分かる．この結果は Gibbons–Hawking エントロピー (1.9) を再現している．

3.2　非連結バルク領域間のエンタングルメント

2 つの因果的に非連結な Rindler ウェッジ $\mathfrak{R}_N$ と $\mathfrak{R}_S$ とは自然にエタングルしている．これから見るように，エンタングルメントのバルクの概念は，ホログラフィーを必要とせずに理解できる．ここでは，バルクの解析を，第 1 節で考案された，最大限に拡張された座標がバルクの対蹠的対称性の存在を明らかにしたことを観察することから始める．この対称性は,（固有に Euclid 化された）北極の Rindler ウェッジ $\mathfrak{R}_N$ 内のすべての点を，$\mathfrak{R}_S$ 上の対蹠点に移す（その逆も同様）．このように，一方の極にモード化すると，バルクの対蹠的対称性によりバルクのトポロジーは単一の 4 次元球面を使って記述することができる．さらに，この球面を 3 次元球面に制限すると，バルクの対蹠的対称性は，2 つの分離

した dS 境界の間のエンタングルメントを研究するために以前使った境界の対蹠的対称性として解釈できる，より小さな対蹠的対称性を誘発する．

Wick 回転すると，2 つの Rindler ウェッジ $\mathfrak{R}_N$ と $\mathfrak{R}_S$ は別々にそれぞれが 1 つの 4 次元球面のトポロジーを獲得する．このとき，Euclid 的バルク・トポロジーは $\left(\mathfrak{R}_N \cup \mathfrak{R}_S\right)_E \cong S^4_{\mathfrak{R}_N} \cup S^4_{\mathfrak{R}_S}$ の通りである．(2.1) で導入した Euclid 化された埋込座標を用いて，パラメータのシフト

$$\theta \mapsto \pi - \theta \ , \quad \phi \mapsto \phi + \pi \ , \tag{3.23}$$

により，可逆な対蹠写像

$$\Pi : S^4_{\mathfrak{R}_N} \longrightarrow S^4_{\mathfrak{R}_S} \tag{3.24}$$

を定義することができ，このとき，$\Pi(X) = -X \ , \ X \in \mathbb{R}^5$ である．実際，$\mathfrak{R}_N$ に対し $0 \leq \theta < \pi/2$ であり，$\mathfrak{R}_S$ に対し $\pi/2 < \theta \leq \pi$ であることを思い起こすと，(3.23) が $S^4_{\mathfrak{R}_N}$ にあるすべての点を南極の Euclid 的ウェッジ $S^4_{\mathfrak{R}_S}$ における対蹠点に移すことを証明することは容易である．特に，北極の観測者は南極の観測者に写像され，つまり，$\Pi(\mathcal{O}_N) = \mathcal{O}_S$ である．

対蹠写像 (3.24) が存在することにより，バルクの幾何は 4 次元球面

$$S^4 = \left(\mathfrak{R}_N \cup \mathfrak{R}_S\right)_E \, / \, \Pi \tag{3.25}$$

として有効に記述されることになる．

写像 (3.24) を 4 次元球面 (3.25) の内側の 3 次元球面に制限することができる．これは，埋込座標 (2.1) を用いて，$X^4 = 0$ と設定することによりなされる．一方，4 次元球面座標を用いると，この制限は子午線 $\phi = 0$ に移ることで得られる．いずれの場合も対称性 $\Pi\big|_{X^4=0} = \pi$ を誘発し，ここで，$\pi : S^3 \to S^3$ は，$\phi = 0$ での評価に続くシフト (3.23) によって作用する対蹠的対称性である．これより，$\pi(X) = -X \ , \ X \in \mathbb{R}^4$ を直接証明することができる．したがって，上の対称性を境界対蹠的対称性 (3.11) と同一のものと考えることができる．

北極と南極の Rindler ウェッジ $\mathfrak{R}_N$ と $\mathfrak{R}_S$ の間のエンタングルメント・エントロピーは，ホログラフィーの関係を用いずに，純粋にバルクの考え方だけから計算できる．これについては，その赤外極限が Einstein 重力になる，dS 空間上の量子重力理論の存在を仮定するだけでできる．この極限において，量子重力の分配関数は Euclid 的なオンシェル重力

の作用で近似できる．対蹠的対称性 (3.24) により，バルクの分配関数が単一の 4 次元球面上にサポートをもつようにとることができるということは重要な点である．

3.1 節と同様のロジックに従い，バルクの多様体を 4 次元球面にとる（ここで思い起こすことは，対蹠的対称性 (3.24) を法として 2 つの Rindler ウェッジから作られるということである）．次に，そのモジュラー発展が全バルクの 4 次元球面を再構成する，一つの Cauchy 様スライスを選ぶ．これを

$$\mathcal{C}_\Phi = B^3_S \cup B^3_N \tag{3.26}$$

ととり，ここで，B^3_S は，その境界が 2 次元球面 Σ_S である，3 次元球である．これは，$\mathfrak{R}_S \cong S^4$ 上の対蹠的対称性 (3.24) を作用し，方位角を適当な固定値 Φ_0 に制限することで得られる．つまり，

$$B^3_S := \big(\mathfrak{R}_S/\Pi\big)\Big|_{\Phi_0}\ , \quad \partial B^3_S = \Sigma_S \tag{3.27}$$

であり， B^3_N に対しても同様である．この様に，$\mathcal{C}_\Phi$ は，それぞれの境界 Σ_S と Σ_N に沿って 3 次元球 B^3_S と B^3_N を張り合わせることにより構成された一つの 3 次元球面である（Σ_S と Σ_N はバルク $\mathbb{Z}_q$ 作用の固定点の集合であり，その両者は Euclid 幾何における 2 次元球面であることを思い出せ）．

B^3_S と B^3_N をエンタングルした，相補的な部分系として扱うと，それに対応したエンタングルメント・エントロピーが計算できる．これは

$$\mathcal{S}_\mathrm{E} = \lim_{q\to 1} \frac{\log \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^q_{B^3_S}}{1-q} = -\partial_q \log \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^q_{B^3_S}\Big|_{q=1} \tag{3.28}$$

により与えられ，ここで，縮約された密度行列は $\hat{\rho}_{B^3_S} := \mathrm{Tr}_{B^3_N}(\hat{\rho}_{\mathcal{C}_\Phi})$，また，レプリカ法を用いて，

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^q_{B^3_S} = \frac{\mathcal{Z}_\mathrm{QG}[S^4_q]}{(\mathcal{Z}_\mathrm{QG}[S^4])^q} \tag{3.29}$$

が計算され，この中で 4 次元球面の分岐した被覆を S^4_q と表した．log をとり，4 次元球面 $S^4 \cong \mathfrak{R}$（ここで，Rindler ウェッジは，一般性を失うことなく，北極または南極にとることができる）上のオンシェル重力作用 I_E を使い半古典近似 $\mathcal{Z}_\mathrm{QG} \approx \exp(-I_E)$ をすると，

$$\log \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^q_{B^3_S} = \log \mathcal{Z}_\mathrm{QG}[S^4_q] - q \log \mathcal{Z}_\mathrm{QG}[S^4] \approx -q\Big(I_E[S^4/\mathbb{Z}_q] - I_E[S^4]\Big) \tag{3.30}$$

となる．上式では，重力作用の局所性を用いて $I_E[S^4_q] = qI_E[S^4/\mathbb{Z}_q]$ とした．多様体 $S^4/\mathbb{Z}_q$ は Euclid 的 Rindler ウェッジと対応する格子欠陥 Σ（これは Σ_S または Σ_N のどちらか）か

ら成る．作用のオンシェル値は，(3.22) でトーションレス極限 $I_E \approx -\pi\ell^2/G_4$ をとったものである．まとめると

$$\log \mathrm{Tr}\, \hat{\rho}^q_{B^3_S} = 2(1-q)\, \frac{A_\Sigma}{4G_4} \tag{3.31}$$

となり，したがって，エンタングルメント・エントロピー (3.28) は

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}} = \frac{2A_\Sigma}{4G_4} = 2\mathcal{S}_{dS} \tag{3.32}$$

で与えられる．上の結果は Gibbons–Hawking エントロピー (1.9) と因子が 2 だけ異なることが分かる．この因子 2 の原因はここで使った拡張されたバルクの記述にあると解釈できる．実際，全バルク幾何は 2 つの極小局面を含んでいて，両者とも 2 次元球面の面積を持っているので， $2A_\Sigma =: \mathrm{Area}(\mathcal{F})$ であり，このとき， $\mathcal{F} = \Sigma_S \cup \Sigma_N$ は，$\mathfrak{R}_S \cup \mathfrak{R}_N$ 上の $\mathbb{Z}_q$ 作用の固定点の集合を示している．この様な理由で，エントロピー (3.32) は面積側

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{Area}(\mathcal{F})}{4G_4} \tag{3.33}$$

として作り変えることができる．この解釈は，極小曲面 Σ_S と Σ_N のそれぞれが，それ自身，Gibbons–Hawking エントロピーを与える自由度（テンションレス極限で消える，$(1-q^{-1})$ に比例する中心荷電によって特徴づけられる）をエンコードするという，最近の提案 [53] と一致している．ここでの設定では，この 2 つの極小曲面は，Cauchy 様スライスの赤道に沿って重なり合っていて，それらはエンタングルしている曲面の中に局在化された微視的状態の総個数のエンタングルメントであり，(3.32) における余分な因子 2 の原因となっていると予想できる．

4 議論

本稿では，文献 [1] に沿って，dS 空間の 2 つの切断された共形境界 $\mathcal{I}^+$ および $\mathcal{I}^-$ 間のホログラフィック・エンタングルメントと，2 つの因果的に切断された Rindler ウェッジ $\mathfrak{R}_S$ および $\mathfrak{R}_N$ 間のバルクエンタングルメントについて詳述した．

前者の場合には，dS_4 における量子重力と，3 次元球面上での共形場理論の 2 つのコピー（それぞれの境界に 1 つのコピーが対応）の間のホログラフィック双対性を仮定した．低エネルギー極限において，この双対性は，Euclid 的オンシェル重力作用を含む，CFT 分

配関数 $\mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}[S^3] \approx \exp\left(-\frac{1}{2}I_E[\mathfrak{R}_S]\right)$（この関係式は以前，[60] において別の内容で提案されたもの）と関連している．

2 つの境界間のホログラフィック・エンタングルメント・エントロピーを計算するために，$S^3 = (\mathcal{I}^- \cup \mathcal{I}^+) \,/\, \pi$ で定義された境界 3 次元球面をとった．このとき，π は (3.11) の対蹠的対称性である．さらに，その境界が (3.16) 式で示された，$S^3/\mathbb{Z}_q$ オービフォールドの固定点の S^1 集合と一致する，2 つの円盤を張り合わせてできる，2 次元球面によって与えられる境界 S^3 内の 1 つの Cauchy 様曲面を選んだ．結局，((3.21) 式に示した）作用 $I_E[\mathfrak{R}_S/\mathbb{Z}_q]$ のオンシェル値を計算するためにレプリカ対称をバルクに拡張することにより，2 つの円盤間のエンタングルメント・エントロピーは正確に Gibbons–Hawking エントロピーを再現する．

2 つの内部 Rindler ウェッジ間のバルク・エンタングルメントに対するように，その赤外極限が Einstein 重力である，dS 空間上のいくつかの量子重力の存在のみを仮定した．この場合，バルク多様体を 4 次元球面 $S^4 = (\mathfrak{R}_S \cup \mathfrak{R}_N)/\Pi$ として扱った．ここで，Π はバルクの対蹠的対称性 (3.24) である（かつ，Rindler ウェッジは暗に Euclid 化されている）．前と同じ理論的根拠に従い，その境界が $S^4/\mathbb{Z}_q$ オービフォールドの固定点の集合と一致する，2 つの 3 次元球を張り合わせて得られる 3 次元球面によって与えられる Cauchy 様曲面を選び取った．$\mathcal{F} = \Sigma_S \cup \Sigma_N$ で示した，後者の固定点の集合は，正確に，第 2 節で構築した余次元数 2 の極小曲面のペアになっている．Cauchy 様スライスの 2 分割である 2 つの 3 次元球の間のエンタングルメント・エントロピーを計算すると，面積側 $S_{\mathrm{E}} = \frac{1}{4}\mathrm{Area}(\mathcal{F})$ に従うエンタングルメント・エントロピーになる．

上の結果は，dS 空間におけるエンタングルメントの考え方が，時空多様体の連結性からの直接的な帰結のように見える．この意味で，この発見は，エンタングルメントがトポロジーから生じるという，以前のアイデア [64–66] と再び同調するものである．結果の物理的解釈と将来の研究の方向性について，ここで，この構造の基礎となる最も適したアイデアであると考えているものについて詳しく解説しておく．

2 つの基本的離散バルク対称性が存在し，$\mathbb{Z}_q$ と対蹠的対称性とよばれる．ここでの設定では，バルクの $\mathbb{Z}_q$ 作用を，重く，観測できない観測者の存在に対する背景幾何の応答として解釈する．そのような観測者の反作用—それは宇宙ホライズンの $SO(3)$ 対称性を $U(1)$ 対称性に破る—は，$\mathrm{dS}_4/\mathbb{Z}_q$ オービフォールドの固定点の集合によって定義された，

余次元数 2 の極小曲面のペアを誘発する．境界内に制限されたとき，バルクの $\mathbb{Z}_q$ 対称性は境界のレプリカ対称性に移り，その固定点は，$S^1 \hookrightarrow S^2$ のように，バルクの $\mathbb{Z}_q$ 作用の固定点に伸びてい行く．

バルクの対蹠的対称性は Euclid 的 Rindler ウェッジのすべての点を，それと反対側のウェッジ上のある点に移し（特に，北極の観測者 $\mathcal{O}_N$ を南極の観測者 $\mathcal{O}_S$ に写像する），それにより単一の 4 次元球面上にサポートをもつバルク重力の分配関数を書き下すことができる．境界に制限されたとき，その対称性は，過去の 3 次元球面上のすべての点を未来の 3 次元球面上のある対蹠点に写像する，境界の対蹠的対称性に翻訳される．

この 2 つのバルク対称性の存在は，境界のレプリカ対称と対蹠的対称性が，より大きなバルク対称性の境界へ制限した対称性として生じるため，真に基本的なものではないことを示している．

4 次元において，純粋な dS 空間のエネルギーはゼロである．これは正準熱力学関係式 $\beta F = \beta E - \mathcal{S}_{dS}$ から簡単に可視化でき，ここで，$\beta = T_{dS}^{-1} = 2\pi\ell$ である．このとき，Gibbs 自由エネルギーは（量子）重力の分配関数によって定義され，半古典極限において，オンシェル重力作用により，良い近似をもつ．るまり，$\beta F = -\log \mathcal{Z}_{\mathrm{QG}} \approx I_{\mathrm{E}}$ である．–境界項をもたない–Einstein–Hilbert 作用のオンシェル値は，dS エントロピーのマイナス値に相当するので，$I_{\mathrm{E}} \approx -\mathcal{S}_{dS}$，$E = 0$ が従う．しかし，3.1 節で提案した重い慣性観測者のホログラフィックな記述に基づくと，エネルギーがゼロにならない考え方も定義できる．

実際，慣性観測者と熱場二重状態 $|\mathcal{O}_S\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{I}^-} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{I}^+}$ の間のホログラフィック双対性は，観測者の密度行列 $\rho_{\mathcal{O}} := |\mathcal{O}_S\rangle\langle\mathcal{O}_S|$ が熱的であることを暗示している．さらに，エンタングルメント・エントロピー $\mathcal{S}_{\mathrm{E}} = -\mathrm{tr}(\rho_{\mathcal{O}} \log \rho_{\mathcal{O}})$ は正準関係式 $\beta F = \beta\langle H\rangle - \mathcal{S}_{\mathrm{E}}$ に従う．このとき，H はモジュラー・ハミルトニアンである．この場合，熱的自由エネルギーは境界の場の理論の分配関数を使って定義されている $\beta F = -\log \mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}}$．低エネルギー極限において，分配関数は Euclid 的オンシェル重力作用によって，$\beta F \approx I_E[\mathfrak{R}_S/\mathbb{Z}_q]$ で与えられ，これは Nambu–Goto の境界項を含んでいる （(3.21) 式を参照）．そこで，エンタングルメント・エントロピーが dS エントロピーに等しいことを使うと，$\langle H\rangle = \left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{\ell}{G_4}$ であることが分かる．これは，境界モジュラーハミルトニアンの期待値を用いて 4 次元 dS エネルギーを定義する，$E := \langle H\rangle$，の可能性を示唆している．ここで，テンションレス極限 $q \to 1$ は $E = 0$ と等価で，境界項の不在性を意味していことは注目すべき点である．

dS 空間における 2 つの Rindler ウェッジ間のエンタングルメント・エントロピーの非ホログラフィックな計算はおそらく AdS 空間に拡張できる．本質的に，このアイディアは 4 次元 AdS 空間の 2 つのコピーをその共形境界に沿って張り合わせ，それぞれのコピーを Rindler ウェッジとして扱うことである．この構成は動径方向の AdS 座標を，実軸全体（$-\infty$ から ∞ へ）を走らせるように，拡張することにより実行される．その張り合わせの方法は $\mathbb{Z}_2$ を増強し，結果として，2 つの全体的に重なり合った共形境界は単一のドメイン・ウォールになる．つぎに，2 つの AdS 空間のコピーを $H_2 \times_w H_2$ と葉層化して（これは単に本稿で使われた $S^2 \times_w S^2$ 葉層構造の双曲版であり，ここで，H_2 は 2 次元双曲空間を表し，w は双曲的ワープ因子である.），一組の因果的に非連結な，重い観測者をオービフォールド特異点 $H_2/\mathbb{Z}_q$ の固定点に置くことになる．このとき，2 人の観測者は，中点に共形境界がある無限の距離を隔てて置かれている．2 つの AdS 空間のうちの 1 つについて部分的なトレースをとって，エンタングルメント・エントロピー $\mathcal{S}_{\mathrm{E}} = \mathrm{Area}(\mathcal{F})/4G_4$ が得られ，ここで，$\mathrm{Area}(\mathcal{F})$ は，2 つのオービフォールドの固定点の集合 $H_2/\mathbb{Z}_q$（それぞれの AdS 空間のコピーに対し 1 つのオービフォールドが対応）によって定義された 2 つの極小曲面の面積である．

参考文献

[1] C. Arias, F. Diaz and P. Sundell, *De Sitter Space and Entanglement*, *Class. Quant. Grav.* **37** (2020) 015009, [1901.04554].

[2] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, *The Astronomical Journal* **116** (1998) 1009.

[3] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 High‐Redshift Supernovae*, *The Astrophysical Journal* **517** (Jun, 1999) 565–586.

[4] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation*, *Phys. Rev.* **D15** (1977) 2738–2751.

[5] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2333–2346.

[6] J. D. Bekenstein, *Generalized second law of thermodynamics in black hole physics*, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3292–3300.

[7] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199–220.

[8] S. W. Hawking, *Black Holes and Thermodynamics*, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 191–197.

[9] E. Witten, *Quantum gravity in de Sitter space*, in *Strings 2001: International Conference Mumbai, India, January 5-10, 2001*, 2001, hep-th/0106109.

[10] T. Banks, *Cosmological breaking of supersymmetry?*, *Int. J. Mod. Phys.* **A16** (2001) 910–921, [hep-th/0007146].

[11] T. Banks and W. Fischler, *M theory observables for cosmological space-times*, hep-th/0102077.

[12] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Geometry of the (2+1) black hole*, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 1506–1525, [gr-qc/9302012].

[13] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *The Black hole in three-dimensional space-time*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849–1851, [hep-th/9204099].

[14] S. Carlip, *Statistical mechanics of the (2+1)-dimensional black hole*, *Phys. Rev. D* **51** (Jan, 1995) 632–637.

[15] J. M. Maldacena and A. Strominger, *Statistical entropy of de Sitter space*, *JHEP* **02** (1998) 014, [gr-qc/9801096].

[16] R. M. Wald, *Black hole entropy is the noether charge*, *Phys. Rev. D* **48** (Oct, 1993) R3427–R3431.

[17] V. Iyer and R. M. Wald, *Some properties of the noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy*, *Phys. Rev. D* **50** (Jul, 1994) 846–864.

[18] J. L. Cardy, *Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories*, *Nucl. Phys.* **B270** (1986) 186–204.

[19] H. W. J. Bloete, J. L. Cardy and M. P. Nightingale, *Conformal Invariance, the Central Charge, and Universal Finite Size Amplitudes at Criticality*, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 742–745.

[20] S. Carlip, *Entropy from conformal field theory at Killing horizons*, *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) 3327–3348, [gr-qc/9906126].

[21] A. Strominger, *Black hole entropy from near horizon microstates*, *JHEP* **02** (1998) 009, [hep-th/9712251].

[22] J. D. Brown and M. Henneaux, *Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity*, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 207–226.

[23] A. Strominger, *The dS / CFT correspondence*, *JHEP* **10** (2001) 034, [hep-th/0106113].

[24] M.-I. Park, *Statistical entropy of three-dimensional Kerr-de Sitter space*, *Phys. Lett.* **B440** (1998) 275–282, [hep-th/9806119].

[25] C. Hull, *Timelike t-duality, de sitter space, large*, *JHEP* **9807** (1998) 021, [hep-th/9806146].

[26] M. Banados, T. Brotz and M. E. Ortiz, *Quantum three-dimensional de Sitter space*, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 046002, [hep-th/9807216].

[27] M.-I. Park, *Symmetry algebras in Chern-Simons theories with boundary: Canonical approach*, *Nucl. Phys.* **B544** (1999) 377–402, [hep-th/9811033].

[28] R. Bousso, *A Covariant entropy conjecture*, *JHEP* **07** (1999) 004, [hep-th/9905177].

[29] R. Bousso, *Holography in general space-times*, *JHEP* **06** (1999) 028, [hep-th/9906022].

[30] R. Bousso, *Positive vacuum energy and the N bound*, *JHEP* **11** (2000) 038, [hep-th/0010252].

[31] V. Balasubramanian, P. Horava and D. Minic, *Deconstructing de sitter*, *JHEP* **0105** (2001) 043, [hep-th/0103171].

[32] D. Klemm, *Some aspects of the de Sitter / CFT correspondence*, *Nucl. Phys.* **B625** (2002) 295–311, [hep-th/0106247].

[33] S. Cacciatori and D. Klemm, *The Asymptotic dynamics of de Sitter gravity in three-dimensions*, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 579–588, [hep-th/0110031].

[34] V. Balasubramanian, J. de Boer and D. Minic, *Mass, entropy and holography in asymptotically de sitter spaces*, *Phys.Rev.* **D65** (2002) 123508, [hep-th/0110108].

[35] R. Bousso, A. Maloney and A. Strominger, *Conformal vacua and entropy in de sitter space*, *Phys.Rev.D* **65** (2002) 104039, [hep-th/0112218].

[36] M. Spradlin and A. Volovich, *Vacuum states and the S matrix in dS / CFT*, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 104037, [hep-th/0112223].

[37] V. Balasubramanian, J. de Boer and D. Minic, *Notes on de Sitter space and holography*, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 5655–5700, [hep-th/0207245].

[38] J. M. Maldacena, *Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models*, *JHEP* **05** (2003) 013, [astro-ph/0210603].

[39] D. Anninos, T. Hartman and A. Strominger, *Higher Spin Realization of the dS/CFT Correspondence*, *Class. Quant. Grav.* **34** (2017) 015009, [1108.5735].

[40] J. D. Brown and J. W. York, *Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action*, *Phys. Rev. D* **47** (Feb, 1993) 1407–1419.

[41] J. M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113–1133, [hep-th/9711200].

[42] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105–114, [hep-th/9802109].

[43] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253–291, [hep-th/9802150].

[44] S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602, [hep-th/0603001].

[45] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, *A Covariant holographic entanglement entropy proposal*, *JHEP* **07** (2007) 062, [0705.0016].

[46] H. Casini, M. Huerta and R. C. Myers, *Towards a derivation of holographic entanglement entropy*, *JHEP* **05** (2011) 036, [1102.0440].

[47] X. Dong, *The Gravity Dual of Renyi Entropy*, *Nature Commun.* **7** (2016) 12472, [1601.06788].

[48] M. Alishahiha, A. Karch, E. Silverstein and D. Tong, *The dS/dS correspondence*, *AIP Conf. Proc.* **743** (2005) 393–409, [hep-th/0407125].

[49] X. Dong, E. Silverstein and G. Torroba, *De Sitter Holography and Entanglement Entropy*, *JHEP* **07** (2018) 050, [1804.08623].

[50] Y. Sato, *Comments on Entanglement Entropy in the dS/CFT Correspondence*, *Phys. Rev.* **D91** (2015) 086009, [1501.04903].

[51] K. Narayan, *On extremal surfaces and de Sitter entropy*, *Phys. Lett.* **B779** (2018) 214–222, [1711.01107].

[52] D. P. Jatkar, K. S. Kolekar and K. Narayan, *N-level ghost-spins and entanglement*, 1812.07925.

[53] C. Arias, F. Diaz, R. Olea and P. Sundell, *Liouville description of conical defects in dS_4, Gibbons-Hawking entropy as modular entropy, and dS_3 holography*, 1906.05310.

[54] S. F. Edwards and P. W. Anderson, *Theory of spin glasses*, *Journal of Physics F: Metal Physics* **5** (1975) 965.

[55] P. Calabrese and J. L. Cardy, *Entanglement entropy and quantum field theory*, *J. Stat. Mech.* **0406** (2004) P06002, [hep-th/0405152].

[56] M. Spradlin, A. Strominger and A. Volovich, *Les houches lectures on de sitter space*, hep-th/0110007.

[57] T. Hartman, *Lecture notes on classical de sitter space*, http://www.hartmanhep.net/GR2017/desitter-lectures-v2.pdf.

[58] W. Thurston and S. Levy, *Three-Dimensional Geometry and Topology.* No. v. 1 in Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 2014.

[59] D. V. Fursaev and S. N. Solodukhin, *On the description of the Riemannian geometry in the presence of conical defects*, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 2133–2143, [hep-th/9501127].

[60] J. Maldacena, *Einstein Gravity from Conformal Gravity*, 1105.5632.

[61] D. Anninos, *De Sitter Musings*, *Int. J. Mod. Phys.* **A27** (2012) 1230013, [1205.3855].

[62] M. Rangamani and T. Takayanagi, *Holographic Entanglement Entropy*, *Lect. Notes Phys.* **931** (2017) pp.1–246, [1609.01287].

[63] A. Lewkowycz and J. Maldacena, *Generalized gravitational entropy*, *JHEP* **08** (2013) 090, [1304.4926].

[64] A. Kitaev and J. Preskill, *Topological entanglement entropy*, *Phys.Rev.Lett.* **96** (2006) 110404, [hep-th/0510092].

[65] G. Salton, B. Swingle and M. Walter, *Entanglement from topology in chern-simons theory*, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 105007, [1611.01516].

[66] D. Melnikov, A. Mironov, S. Mironov, A. Morozov and A. Morozov, *From topological to quantum entanglement*, *ITEP/TH-25/18, FIAN/TD-17/18, IITP/TH-15/18* (09, 2018) , [1809.04574].

[67] W. Israel, *Thermo-field dynamics of black holes*, *Physics Letters A* **57** (1976) 107 – 110.

[68] J. M. Maldacena, *Eternal black holes in anti-de Sitter*, *JHEP* **04** (2003) 021, [hep-th/0106112].